PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2002

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

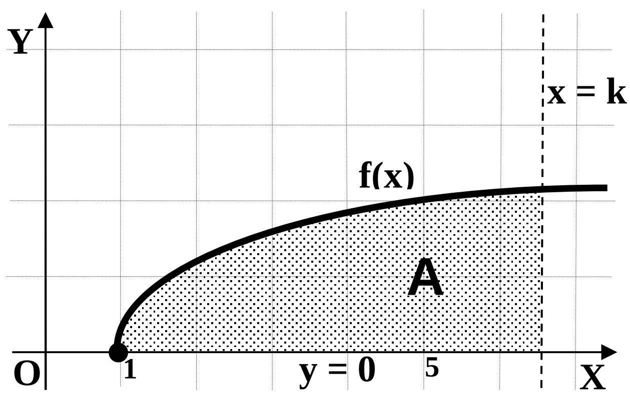
El alumno deberá contestar de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas que a continuación se proponen.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

OPCIÓN A

1º) Se considera la región limitada por la curva $y=\sqrt{x-1}$ y las rectas y = 0 y x = k, siendo k > 1. Calcular, en función de k, el valor del área de esta región. ¿Cuál ha de ser el valor de k para que el área sea de 10 unidades cuadradas?

La situación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



$$A=\int_1^k f(x)\cdot dx=\int_1^k \sqrt{x-1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \middle\| \begin{array}{c} x=k \rightarrow t=k-1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\int_0^{k-1} \sqrt{t}\cdot dt=$$

$$=\left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{k-1}=\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{k-1}=\left[\frac{2\cdot t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{k-1}=\frac{2\cdot(k-1)^{\frac{3}{2}}}{3}-0=\underline{\underline{\frac{2(k-1)\sqrt{k-1}}{3}\ u^2=A}}$$

$$A=10 \Rightarrow \frac{2(k-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\ ;;\ 15=(k-1)^{\frac{3}{2}}\ ;;\ 225=(k-1)^3\ ;;\ k-1=\sqrt[3]{225}\ ;;\ \underline{\underline{k=\sqrt[3]{225}+1}}$$

****

2º) Hallar la ecuación general del plano π que pasa por el punto A(-1, 2, 0) y contiene a la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y + 3z - 2 = 0$.

La recta r que determinan los planos π_1 y π_2 es: $r \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$, cuya expresión en ecuaciones paramétricas es la siguiente.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = k} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = -1 + k \\ -2x - y = -2 + 3k \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x = 3 - 4k}$$

$$x + y = -1 + k \;\;;;\;\; y = -1 + k - x = -1 + k - 3 + 4k = \underline{-4 + 5k = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 3 - 4k \\ y = -4 + 5k \\ z = k \end{cases}}$$

Dando valores a k obtenemos dos puntos de r: $\begin{cases} k = 0 \to \underline{P(3,\ -4,\ 0)} \\ k = 1 \to \underline{Q(-1,\ 1,\ 1)} \end{cases}$

Los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AQ}$ son directores del plano π.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = (3,\ -4,\ 0) - (-1,\ 2,\ 0) = \underline{(4,\ -6,\ 0) = \overrightarrow{u}}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AQ} = Q - A = (-1,\ 1,\ 1) - (-1,\ 2,\ 0) = \underline{(0,\ -1,\ 1) = \overrightarrow{v}}$$

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; -6(x+1) - 4z - 4(y-2) = 0 \;\;;;$$

$$-6x - 6 - 4z - 4y + 8 = 0 \;\;;;\;\; -3x - 2y - 2z + 1 = 0 \;\;;;\;\; \underline{\underline{\pi \equiv 3x + 2y + 2z - 1 = 0}}$$

****

3º) Enunciar el Teorema de Rolle. Aplicarlo, si es posible, a $f(x) = sen\ x \cdot \cos\ x$ en el intervalo $[0,\ \pi]$, donde $\alpha \in (0,\ \pi)$ para el cual $f'(\alpha) = 0$.

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

La función $f(x) = sen\ x \cdot \cos\ x$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo tanto, es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $(0,\ \pi)$.

Aplicando el Teorema:

$$f(x) = sen\ x \cdot \cos\ x \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{cases} f(0) = sen\ 0 \cdot \cos\ 0 = 0 \cdot 1 = 0 \\ \\ f(\pi) = sen\ \pi \cdot \cos\ \pi = 0 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \right\} \quad \Rightarrow \quad f(0) = f(\pi)$$

$$f'(x) = \cos\ x \cdot \cos\ x + sen\ x \cdot (-sen\ x) = \cos^2 x - sen^2 x = \cos(2x) = 0 \ \Rightarrow \ 2x = \frac{\pi}{2} \ ;; \ \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}}$$

$$\underline{\underline{f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 0}}$$

****

4º) Sea A una matriz 3 x 3 de números reales y sea det (A) el valor del determinante de A. Calcular una fórmula que exprese det (kA) en función de det (A), donde kA indica el producto de un número real k por la matriz A. Escribir la propiedad de los determinantes que pueden servir para encontrar la fórmula.

El producto de una matriz por un número es otra matriz que resulta de multiplicar todos los elementos de la matriz por el número.

Por otra parte, una propiedad de los determinantes dice que "si se multiplican o dividen los elementos de una fila o de una columna por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por el número".

Según lo anterior, el det (kA) resulta de multiplicar tres veces (tantas como filas o columnas tenga la matriz) por k el determinante de la matriz, o sea:

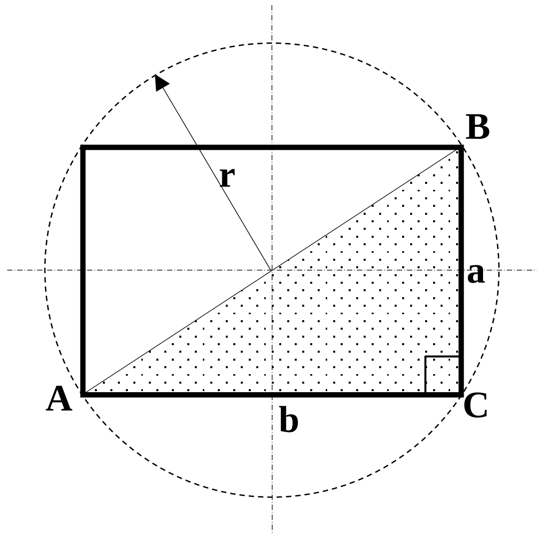
$$\det\left(kA\right)=k\cdot k\cdot k\cdot \det\left(A\right)=k^{3}\cdot \det\left(A\right)$$

$$\underline{\underline{\det\left(kA\right)=k^{3}\cdot \det\left(A\right)}}$$

****

REPERTORIO B

1º) De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 1 metro, encontrar las dimensiones del que tenga el perímetro máximo.



El perímetro del rectángulo es:

$$\underline{P = 2a + 2b} \qquad (*).$$

Del triángulo rectángulo ABC se deduce que:

$$(2r)^2 = a^2 + b^2 \;\;;;\;\; 4r^2 = a^2 + b^2 \;\;;;\;\; \underline{b = \sqrt{4r^2 - a^2}}$$

Sustituyendo el valor de b obtenido en la fórmula del perímetro (*):

$$P = 2a + 2b = 2a + 2\sqrt{4r^2 - a^2}\ .$$

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que ser cero:

$$P' = 2 + \frac{2 \cdot (-2a)}{2\sqrt{4r^2 - a^2}} = 2 - \frac{2a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} \;\;;;\;\; \sqrt{4r^2 - a^2} = a \;\;;;$$

$$4r^2 - a^2 = a^2 \;\;;;\;\; 4r^2 = 2a^2 \;\;;;\;\; 2r^2 = a^2 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{a = r\sqrt{2}}$$

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \underline{\underline{r\sqrt{2} = b = a}}\ .$$

$$\underline{\underline{\textit{Se trata de un cuadrdo de lado } \sqrt{2} \textit{ metros}}}$$

****

2º) Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ es perpendicular a la recta $y=\frac{x}{3}+1$.

La derivada de una función en un punto representa la pendiente de la tangente a la función en ese punto.

La pendiente de la recta es $m=\frac{1}{3}$. La pendiente de su perpendicular es m’ = -3.

$$y'=x^2-2x-3 \;\Rightarrow\; y'(a)=m'=-3 \;\Rightarrow\; a^2-2a-3=-3 \;;;\; a^2-2a=0 \;;;\; a(a-2)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \;\rightarrow\; y(0)=-3 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P_1(0,-3)}} \\ a_2=2 \;\rightarrow\; y(2)=\frac{8}{3}-4-6+1=\frac{8}{3}-9=\frac{8-27}{3}=-\frac{19}{3} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P_2\left(2,-\frac{19}{3}\right)}} \end{cases}$$

****

3º) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & k & -1\\ 2 & 1 & -k\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Hallar el rango de A según los valores del parámetro k. Resolver, en caso de ser compatible el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ para k = 2.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & k & -1\\ 2 & 1 & -k\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-1+2-k^2+1-k+2k=-k^2+k+2=0\ ;;\ k^2-k-2=0$$

$$k=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{k_1=2}\\ \underline{k_2=-1}\end{cases}$$

$$\underline{\underline{Rango\ de\ A=3,\ \forall k\in R,\ excepto\ \ para\ \begin{Bmatrix}k\neq 2\\ k\neq -1\end{Bmatrix}\ en\ cuyo\ caso\ el\ rango\ de\ A=2}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-z=1\\ 2x+y-2z=2\\ x-y-z=1\end{array}\right\}$$ Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}=\underline{\underline{1=x}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}=\underline{\underline{0=y}}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}=\underline{\underline{0=z}}$$

****

4º) Encontrar el punto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$ que equidiste de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv x + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x - y + z + 2 = 0$.

La expresión en unas ecuaciones paramétricas de la recta es: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -3k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$.

Un punto genérico de r es: $P(-1+2k,\ -3k,\ 2+2k)$.

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|1 \cdot (-1+2k) + 1 \cdot (-3k) - 1 \cdot (2+2k) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 \cdot (-1+2k) - 1 \cdot (-3k) + 1 \cdot (2+2k) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \;;;$$

$$\frac{|-1 + 2k - 3k - 2 - 2k + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-1 + 2k + 3k + 2 + 2k + 2|}{\sqrt{3}} \;;;\; |-3k - 2| = |7k + 3| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3k - 2 = 7k + 3 \\ -3k - 2 = -7k - 3 \end{array} \right\} \;;;\; \left. \begin{array}{l} -5 = 10k \\ 4k = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{k_1 = -\frac{1}{2}} \;;;\; \underline{k_2 = -\frac{1}{4}}$$

$$k_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2k = -1 - 1 = -2 \\ y = -3k = \frac{3}{2} \\ z = 2 + 2k = 2 - 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(-2, \frac{3}{2}, 1\right)}}$$

$$k_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2k = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ y = -3k = \frac{3}{4} \\ z = 2 + 2k = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)}}$$

****